

BÀI 4. SỰ BIẾN THIÊN VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

*. Đề kiểm tra rèn luyện

♦ Đề 1:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		2		-4		$+\infty$

Bảng biến thiên trên là hàm số nào sau đây

- A.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. **C.** $y = x^4 + 3x^2 + 2$. **D.** $y = \frac{x+1}{x-2}$.

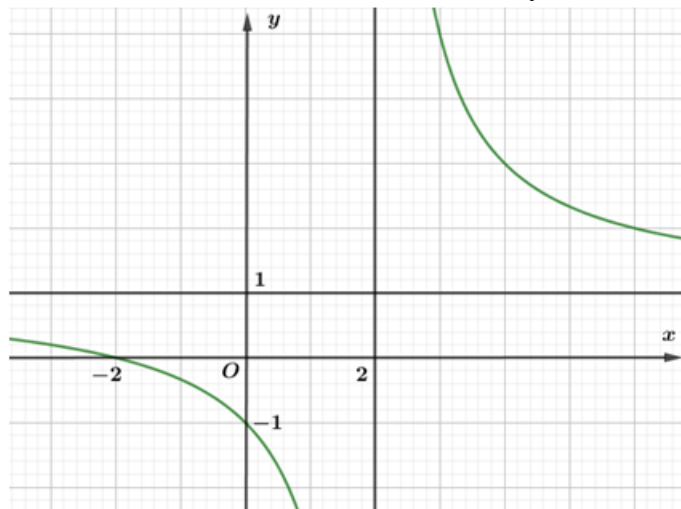
Lời giải

Đây là dáng điệu của hàm số bậc 3 nên ta loại $y = x^4 + 3x^2 + 2$ và $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = -\infty$ nên đáp án $y = x^3 - 3x^2 + 2$ thỏa mãn.

Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x-2}{x+2}$.

B. $y = \frac{2x+4}{x-2}$.

C. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

D. $y = \frac{x+2}{x-2}$.

Lời giải

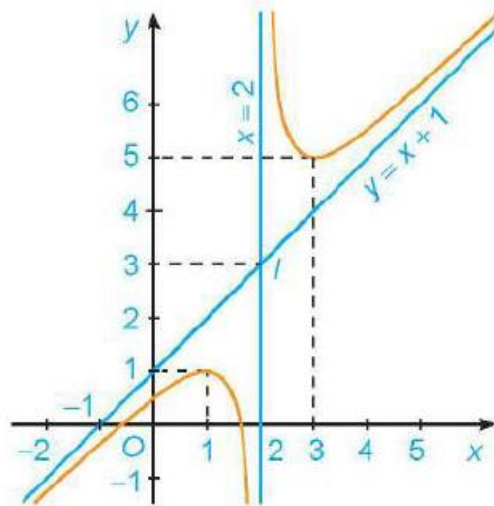
+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là $x = -2$. Loại A

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-2}$ có tiệm cận ngang là $y = 2$. Loại B

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$. Loại **C.**

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận ngang là $y = 1$, tiệm cận đứng $x = 2$, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 .

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Khẳng định nào sau đây SAI?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 1$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

D. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là $A(0;1)$.

Lời giải

Căn cứ vào đồ thị ta có:

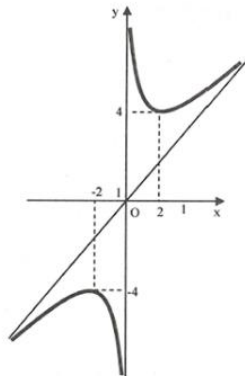
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

Tọa độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục Ox là $A(x_0; 0)$ với $0 < x_0 < 1$.

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = x^4 - 2x^2$.

C. $y = \frac{x^2+4}{x}$.

D. $y = x^3 - 3x^2$.

Lời giải

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ không có tiệm cận xiên. Loại A

+) Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ không có tiệm cận xiên. Loại B

+) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ không có tiệm cận xiên. Loại D

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+4}{x}$ có tiệm cận xiên là $y = x$, tiệm cận đứng $x = 0$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Oy là

A. $(2;0)$.

B. $(0;2)$.

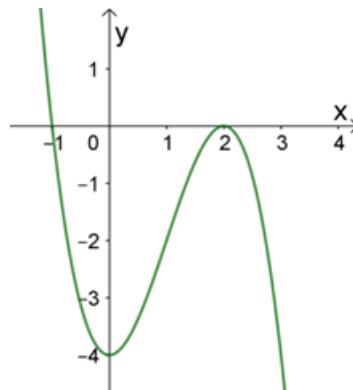
C. $(4;0)$.

D. $(0;4)$.

Lời giải

Cho $x = 0$, ta được $y = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0 - 1} = 4$. Tọa độ giao điểm với trục Oy là $(0;4)$.

Câu 6: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x-1}{x}$.

B. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

C. $y = -x^3 + 3x - 4$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

+) Hàm số $y = \frac{x-1}{x}$ không xác định tại $x = 0$. Loại A

+) Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có hệ số $a = 1 > 0$. Loại B

+) Ta có $y = -x^3 + 3x - 4 \Rightarrow y' = -3x^2 + 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Hàm số có hai điểm cực trị $x = \pm 1$. Loại C

+) Ta có $y = -x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Hàm số có hai điểm cực trị $x = 0, x = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ và $y = 2x - 7$. Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm thì tổng hoành độ hai giao điểm bằng

A. 7.

B. 5.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $\frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = 2x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 11x + 8 = 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11 - \sqrt{89}}{2} \\ x_2 = \frac{11 + \sqrt{89}}{2} \end{cases}$$

suy ra, tổng hoành độ của hai giao điểm là: $x_1 + x_2 = \frac{11 - \sqrt{89}}{2} + \frac{11 + \sqrt{89}}{2} = 11$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là

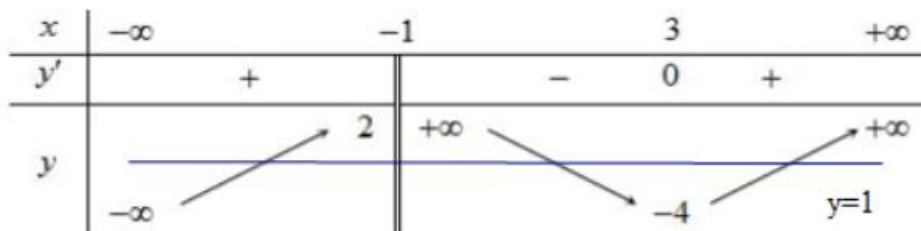
A. 3.

B. 2.

C. 1.

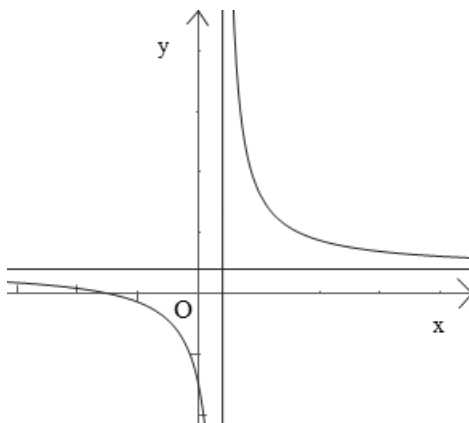
D. 0.

Lời giải



Số giao điểm của đường thẳng $y=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là 3.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a > 1, b > 0, c < 1$. **B.** $a > 1, b < 0, c > 1$. **C.** $a < 1, b > 0, c < 1$. **D.** $a > 1, b > 0, c > 1$.

Lời giải

Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -\frac{d}{c-1}$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y = \frac{a-1}{c-1}$.

Nhìn đồ thị ta thấy: $x = -\frac{d}{c-1} > 0$ mà $d < 0 \Rightarrow c-1 > 0 \Rightarrow c > 1$.

$y = \frac{a-1}{c-1} > 0 \Rightarrow a-1 > 0 \Rightarrow a > 1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 10: Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải có dạng hình trụ và chứa được $16\pi(m^3)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có chiều cao h và bán kính đáy R bằng bao nhiêu để sản xuất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R = 4(m), h = 2(m)$. **B.** $R = 2(m), h = 4(m)$.

C. $R = 2(m), h = 2(m)$. **D.** $R = 4(m), h = 4(m)$.

Lời giải

Do thùng phi có dạng hình trụ nên:

$$V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \frac{16}{R^2} \quad (1)$$

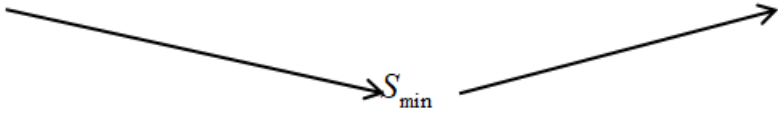
Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$$S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(h + R) \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp} = 2\pi \left(\frac{16}{R} + R^2 \right) \Rightarrow S'_{Tp} = 2\pi \left(-\frac{16}{R^2} + 2R \right) = \frac{4\pi}{R^2} (R^3 - 8) \Rightarrow S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Bảng biến thiên

R	0	2	$+\infty$
S'(R)	-	0	+
S(R)			

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì $R = 2(m)$ và chiều cao là $h = 4(m)$.

- Câu 11:** Gọi S là tập hợp các giá trị m để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + x - 3}{x - 1}$ tạo với hai trục hệ tọa độ Oxy một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó tổng các giá trị của S bằng
- A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{11}{2}$.

Lời giải

với $m = 0$ ta có $y = \frac{x - 3}{x - 1}$. Khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

với $m = 2$ ta có $y = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 2x + 3$. Khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

với $m \neq 0; m \neq 2$ ta có $y = mx + m + 1 + \frac{m - 2}{x - 1}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx - m - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{m - 2}{x - 1} = 0$ nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = mx + m + 1$.

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục Ox là $\left(\frac{m - 1}{m}; 0 \right)$;

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục Oy là $(0; m + 1)$.

Đường tiệm cận xiên tạo thành một tam giác thì diện tích của tam giác:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |m+1| \cdot \left| \frac{m-1}{m} \right| = 2 \hat{U} (m+1)^2 = 4|m| \hat{U} \begin{cases} m^2 + 2m + 1 = 4m; & \text{khi } m \geq 0 \\ m^2 + 2m + 1 = -4m; & \text{khi } m < 0 \end{cases}$$

$$\hat{U} \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 0; & \text{khi } m \geq 0 \\ m^2 + 6m + 1 = 0; & \text{khi } m < 0 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy tổng giá trị của S bằng $\frac{-11}{2}$.

Câu 12: Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).

A. $p = 0,4$.

B. $p = 0,3$.

C. $p = 0,2$.

D. $p = 0,1$.

Lời giải

Sau t phút, trong bể chứa $(50t+150)$ lít nước và $20t$ gam chất khử trùng.

Suy ra nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t) = \frac{20t}{50t+150}$ gam/lít.

Khảo sát sự biến thiên hàm số $f(t) = \frac{20t}{50t+150}$, $t \geq 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{3000}{(50t+150)^2} > 0, \forall t \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{50t+150} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{50 + \frac{150}{t}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	0,4

Dựa vào BBT ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.

Vậy $p = 0,4$.

👉 **Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là (C) . Biết (C) có một điểm cực trị là

$$A(1; -1) \text{ và tâm đối xứng là } I\left(\frac{2}{3}; -\frac{29}{27}\right).$$

Mệnh đề	Đúng	Sai
a) (C) có một điểm cực trị là $B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{27}\right)$.		
b) $a + b + c + d = -1$.		
c) Tiếp tuyến của (C) tại A song song với trục hoành.		
d) $a + 2b + 3c + 4d = 4$.		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

+ Theo tính chất của đồ thị hàm số bậc ba, ta có:

A, B là hai điểm cực trị và I là tâm đối xứng của $(C) \Rightarrow I$ là trung điểm của AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_I - x_A = \frac{1}{3} \\ y_B = 2y_I - y_A = -\frac{31}{27} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Câu a sai.

+ Vì A là điểm cực trị của (C) nên $A \in (C) \Rightarrow a + b + c + d = -1$.

$\Rightarrow$ Câu b đúng.

+ Vì A là điểm cực trị của (C) nên $f'(x_A) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là:

$$y = f'(x_A)(x - x_A) + y_A \Leftrightarrow y = -1$$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến của (C) tại A song song với trục hoành.

$\Rightarrow$ Câu c đúng.

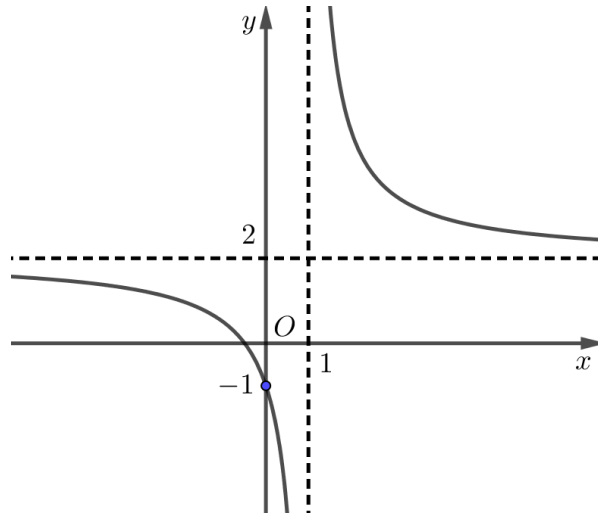
+ Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ và $f''(x) = 6ax + 2b$

$$GT \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_A) = 0 \\ f''(x_I) = 0 \\ A \in (C) \\ I \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \\ a + b + c + d = -1 \\ \frac{8}{27}a + \frac{4}{9}b + \frac{2}{3}c + d = -\frac{29}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = -1 \end{cases}$$

Do đó: $a + 2b + 3c + 4d = -4$

$\Rightarrow$ Câu d sai.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Mệnh đề	Đúng	Sai
a) Tâm đối xứng của đồ thị có tọa độ là $(2;1)$		
b) $a - 2b + c = -5$.		
c) Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x=2$ có phương trình là $y = -3x + 11$.		
d) Có đúng 4 điểm $M(m;n)$ với $m, n \in \mathbb{Q}$ thuộc đồ thị.		

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

+ Từ đồ thị, ta có:

Tiệm cận đứng: $x = 1$

Tiệm cận ngang: $y = 2$

$\Rightarrow$ Tâm đối xứng của đồ thị có tọa độ là $(1;2)$

$\Rightarrow$ Câu a sai.

+ Từ đồ thị, ta có:

Tiệm cận đứng: $x=1 \Rightarrow -\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow c=-1$

Tiệm cận ngang: $y=2 \Rightarrow \frac{a}{c}=2 \Leftrightarrow a=2c$

$\Rightarrow a=-2$

Điểm $A(0;-1)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow -1=b$.

Do đó: $a-2b+c=-1$.

$\Rightarrow$ Câu b sai.

+ Với $a=-2; b=-1; c=-1$ suy ra: $y=\frac{-2x-1}{-x+1}$

$\Rightarrow y'=\frac{-3}{(-x+1)^2}$

Ta có: $x=2 \Rightarrow \begin{cases} y(2)=5 \\ y'(2)=-3 \end{cases}$

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x=2$ có phương trình là

$y=y'(2)(x-2)+y(2)$

$\Leftrightarrow y=-3x+11$

$\Rightarrow$ Câu c đúng.

+ Ta có: $y=\frac{-2x-1}{-x+1}$

Vì $M(m;n)$ thuộc đồ thị nên $n=\frac{-2m-1}{-m+1} \Leftrightarrow n=2-\frac{3}{-m+1}$

Do $m, n \in \mathbb{Z}$ nên $(-m+1) \in U(3) \Leftrightarrow -m+1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

$\Leftrightarrow m \in \{4; 2; 0; -2\}$

Suy ra: có đúng 4 điểm $M(m;n)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thuộc đồ thị.

$\Rightarrow$ Câu d đúng.

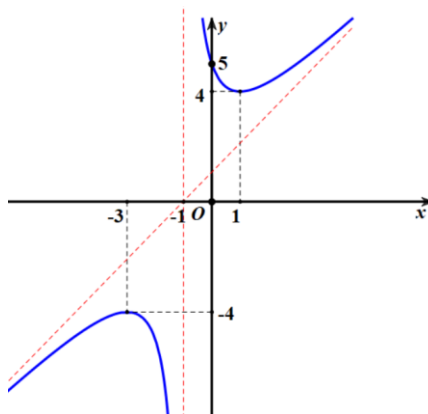
Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x+5}{x+1}$

a) $y'=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

b) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số là $y=2x-2$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

d) Đồ thị của hàm số có hình vẽ như sau



Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) ĐÚNG

$$y' = \frac{(x^2 + 2x + 5)'(x+1) - (x+1)'(x^2 + 2x + 5)}{(x+1)^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2 + 2x + 5)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}.$$

b) SAI

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{hàm số có hai điểm cực trị là } A(1; 4), B(-3; -4).$$

Gọi phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị có dạng $y = ax + b$. Khi đó ta có hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} a + b = 4 \\ -3a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

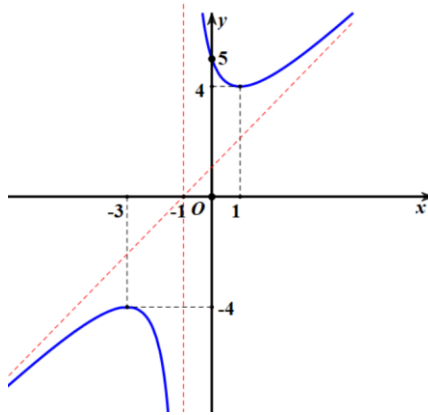
Phương trình đường thẳng AB là $y = 2x + 2$.

c) ĐÚNG

$$y = x + 1 + \frac{4}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x+1} = 0 \Rightarrow y = x+1 \text{ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.}$$

d) ĐÚNG



Câu 4: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Cho phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
- c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B là $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.
- d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ triệu đồng. Do đó a) đúng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là $R(10) = 10 \cdot P(10) = 10 \cdot (45 - 0,001 \cdot 10^2) = 449$ triệu đồng. Do đó b) sai.

c) Lợi nhuận mà A thu được là:
 $H(x) = R(x) - C(x) = xP(x) - C(x) = P(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$
 . Do đó c) đúng.

d) Xét hàm số $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$, ($0 \leq x \leq 100$) ta có $H'(x) = -0,003x^2 + 15$,
 $H'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2}$ (chọn).

Ta có $H(0) = -100$; $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$; $H(100) = 400$.

Vậy A bán cho B khoảng $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$. Do đó d) đúng.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Vậy $y_{CT} = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{2x+6}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x=a$ và $y=b$. Tính $a+4b$?

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5x-3}{2x+6} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5x-3}{2x+6} = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}$.

Do đó đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x=-3$ và $y=\frac{5}{2}$ là các tiệm cận đứng và ngang

Như vậy, $a=-3$; $b=\frac{5}{2} \Rightarrow a+4b = -3+4 \cdot \frac{5}{2} = 7$

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{5x^2-6x+9}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $C = a+3b$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 13

Ta có $f(x) = 5x-1 + \frac{8}{x-1}$ nên đồ thị hàm số nhận hai đường thẳng $x=1$ và $y=5x-1$ tương ứng là TCĐ và TCX. Suy ra $a=1$, $b=4 \Rightarrow C = 1+3 \cdot 4 = 13$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (T) . Số giao điểm của (C) với (T) là?

Lời giải

Trả lời: 2

Xét phương trình hoành độ giao điểm: (ĐK $x \neq 1$)

$$x^3 - 3x + 2 = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 - \frac{x+2}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot \left((x-1)^2 - \frac{1}{x-1} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ (x-1)^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(TM) \\ x=2(TM) \end{cases}$$

Vậy số giao điểm của (C) với (T) là 2.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

Lời giải**Trả lời: 3**

Hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và

$$f(-x) = 2024^{-x} - 2024^x - x - \sin x = -f(x)$$

, suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Mặt khác, $y' = f'(x) = 2024^x \cdot \ln 2024 + 2024^{-x} \cdot \ln 2024 + 1 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình

$$f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow f(x+3) = -f(x^3 - 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow f(x+3) = f(-x^3 + 4x - m) \Leftrightarrow x+3 = -x^3 + 4x - m$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = -m$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							
				5			$+\infty$
					1		

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 3$ tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow 1 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -1.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa đề.

Câu 6: Một cốc chứa 25 ml dung dịch $NaOH$ với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch $NaOH$ khác với nồng độ 9 mg/ml được trộn vào cốc. Gọi $C(x)$ là nồng độ của $NaOH$ sau khi trộn x (ml) từ bình chứa, ta thấy nồng độ của $NaOH$ trong cốc sẽ luôn giảm theo x nhưng luôn lớn hơn một số a . Tính a ?

Lời giải

Trả lời: 9

Tổng khối lượng của $NaOH$ sau khi trộn x (ml) là: $25.100 + 9x = 2500 + 9x$ (mg)

Tổng thể tích của dung dịch sau khi trộn là: $25 + x$.

$$\text{Ta có } C(x) = \frac{2500 + 9x}{25 + x}; x \geq 0.$$

Ta có TXĐ của hàm số là $D = [0; +\infty)$

$$\text{Có } C'(x) = \frac{9 \cdot (25 + x) - (2500 + 9x)}{(25 + x)^2} = \frac{-2275}{(25 + x)^2} < 0, \forall x \in D$$

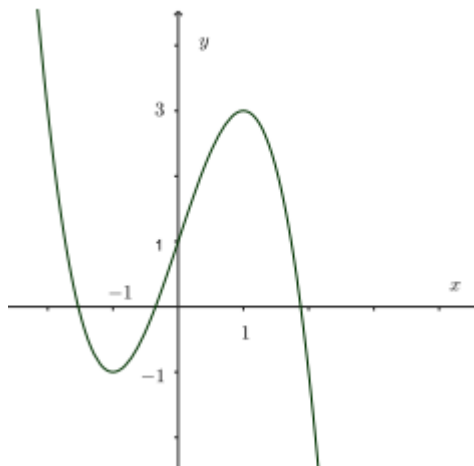
$$\text{Lại có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2500 + 9x}{25 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2500}{x} + 9}{\frac{25}{x} + 1} = 9$$

Do đó nồng độ $NaOH$ luôn giảm nhưng luôn lớn hơn 9 mg/ml.

♦ **Đề 2:**

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong dưới đây?

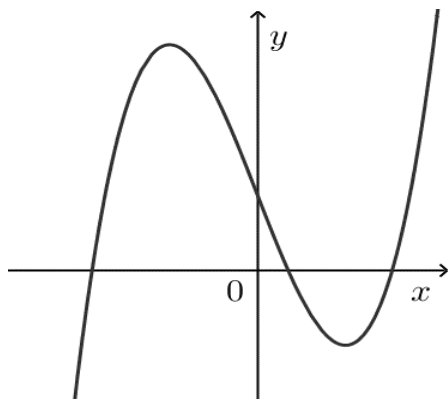


A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1}$. **C.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải

Đồ thị trên là đồ thị hàm bậc 3 có $a < 0$. Suy ra chọn đáp án **C**.

Câu 2: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 1$

B. $y = -x^3 + 3x + 1$

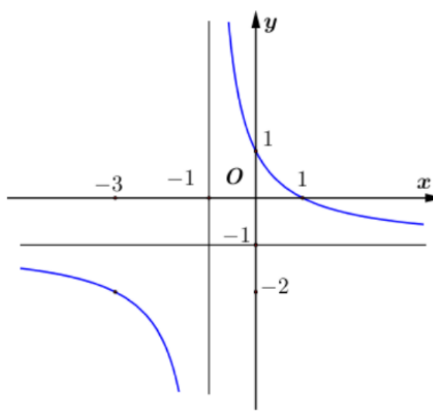
C. $y = x^4 - x^2 + 1$

D. $y = -x^2 + x - 1$

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy: đây là dạng đồ thị hàm bậc ba và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$, ta **chọn A**

Câu 3: Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



A. $y = \frac{-x}{x+1}$

B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$

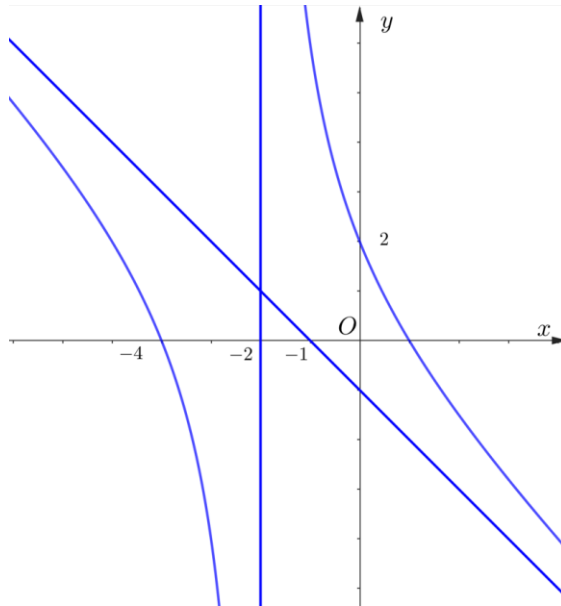
C. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$

D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 0)$; có đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{x+1}$ đi qua điểm $(1; 0)$

Câu 4: Đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



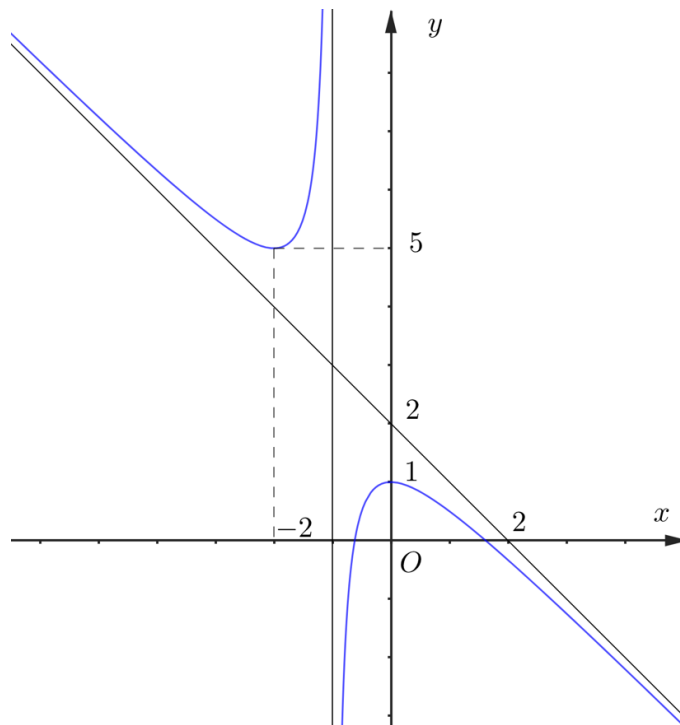
A. $y = \frac{-x+4}{x+2}$. **B.** $y = \frac{-x^2-3x+4}{x+2}$. **C.** $y = \frac{-x^2-3x+2}{x+1}$. **D.** $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4;0)$.

Trong các hàm số, chỉ có đồ thị của hàm số $y = \frac{-x^2-3x+4}{x+2}$ đi qua điểm $(-4;0)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là



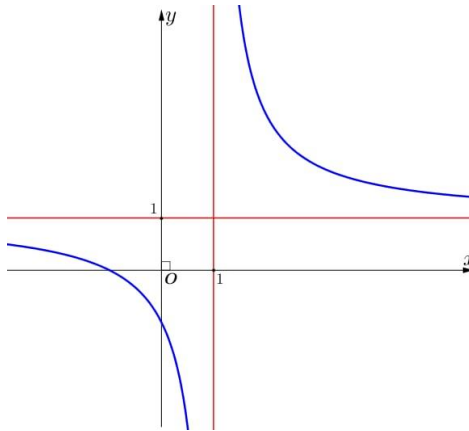
A. $(-2;5)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;3)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có: đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và đường tiệm cận xiên là $y = -x + 2$.

Do đó tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm của hai đường tiệm cận nên có tọa độ là $(-1; 3)$.

Câu 6: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{-2x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

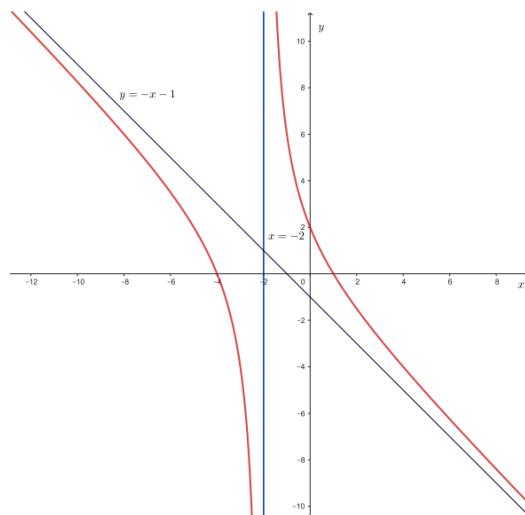
Lời giải

Ta có đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, nên loại A, **B**.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ nên **Chọn D**

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = +\infty$.

Câu 7: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{-x^2-3x+4}{x+2}$.

B. $y = \frac{-x^2-3x+4}{x-2}$.

C. $y = \frac{x-4}{x+2}$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$, nên loại B; D là hàm số bậc 3 nên loại D; đồ thị của C có tiệm cận đứng, không có tiệm cận xiên nên loại **C**.

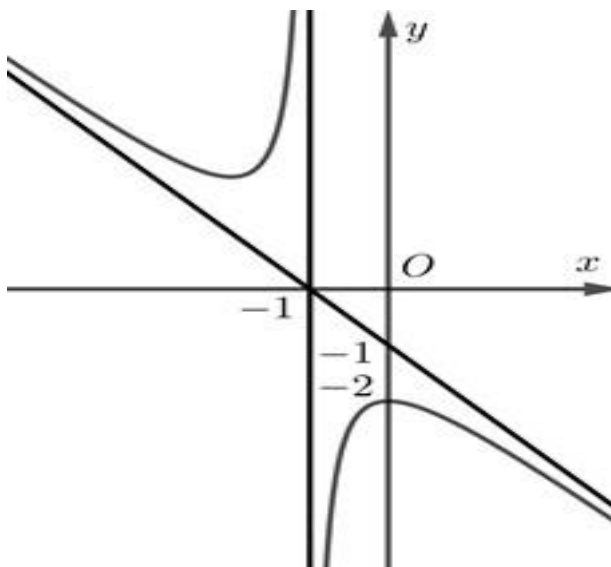
Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = -x - 1$ nên chọn **A**.

$$\text{Vì } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x} = -1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - (-1)x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x} - (-1)x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 4}{x + 2} = -1$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -x - 1$.

Câu 8: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số:



A. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$. **B.** $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$. **C.** $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. **D.** $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = -x - 1$ loại B, C, **D.**

Câu 9: Giả sử hàm nhu cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \frac{60}{1 + 0,2x}$, $12 > x \geq 0$,

trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Để bán được 10 đơn vị sản phẩm thì giá bán là bao nhiêu?

A. 15 (nghìn đồng). **B.** 18 (nghìn đồng). **C.** 19 (nghìn đồng). **D.** 20 (nghìn đồng).

Lời giải

$$\text{Với } x = 10 \Rightarrow p = \frac{60}{1 + 0,2 \cdot 10} = 20 \text{ (nghìn đồng).}$$

Câu 10: Giả sử chi phí (tính bằng trăm ngàn đồng) để sản xuất x chiếc bánh kem là:

$C(x) = 10000 + 20x - \frac{1}{4}x^2 + 0,001x^3$. Chi phí sản xuất chiếc bánh thứ 501 xấp xỉ chi phí biên là bao nhiêu?

A. 250 (nghìn đồng). **B.** 450 (nghìn đồng). **C.** 520 (nghìn đồng). **D.** 300 (nghìn đồng).

Lời giải

Ta có $C'(500) = 20 - \frac{1}{2} \cdot 500 + 0,003 \cdot 500^2 = 5,2$ (trăm ngàn đồng).

$C'(50)$ dự báo cho ta biết chi phí để sản xuất chiếc bánh kem thứ 51 là 520000.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 1}$ đi qua điểm nào trong các điểm cho dưới đây?

- A.** $M(2; 2)$. **B.** $N(2; -2)$. **C.** $P(-1; 3)$. **D.** $Q(4; 1)$.

Lời giải

Với $x = 2$ ta có $y = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 6}{2 - 1} = 2$. Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 1}$ đi qua điểm $M(2; 2)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$. Toạ độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

- A.** $(-3; -8)$. **B.** $(-3; 8)$. **C.** $(1; 0)$. **D.** $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -1$.

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	-3		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y_{CT} = 0$. Vậy toạ độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là $(1; 0)$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Khi đó

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $(0; +\infty)$.
b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(0; 2)$.
c) Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$.
d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng 4.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) **SAI** vì Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

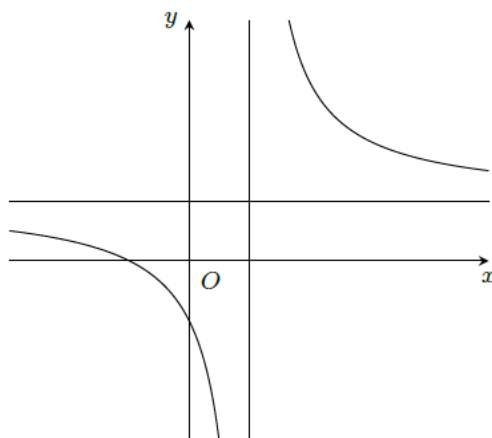
b) **ĐÚNG**. Thay $x=0$ ta được $y=2$.

c) **SAI**. Ta có $y'=3x^2-3$. Ta thấy $y'(0)=-3 \neq 0$. Suy ra hàm số không đạt cực trị tại điểm $x=0$.

d) **ĐÚNG**. Ta có $y'=3x^2-3$. Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow x=1(TM); x=-1(KTM)$.

$y(0)=2; y(2)=4; y(1)=0$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$ bằng 4.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.

c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.

d) Trong các số a, b, c có hai số âm.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) **Đúng**.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

b) **Đúng**.

Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.

c) **Đúng**.

Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.

d) **Sai**.

Tiệm cận đứng $x=a > 0$.

Tiệm cận ngang $y=b > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$ (vì $a > 0$).

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ có đồ thị (C). Khi đó

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.
- c) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 4.
- d) Cho đường thẳng $y = mx - 2$. Khi đó có đúng 8 giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 10 để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = mx - 2$ tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía so với tiệm cận đứng của đồ thị (C).

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) **SAI** vì Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) **ĐÚNG**. Dễ thấy tiệm cận đứng là $x = 2$. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x - 2} \right) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x - 2} \right) = 0$. Vậy phương trình tiệm cận xiên là $y = x$.

c) **ĐÚNG**. Ta có $y' = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}$. Ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 4$. $y(0) = -2; y(4) = 6$. Vậy

tổng các giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là $-2 + 6 = 4$.

d) **SAI**. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = mx - 2$$

Dễ thấy phương trình không có nghiệm $x = 2$ nên phương trình tương đương

$$(m - 1)x^2 - 2mx = 0.$$

Nếu $m = 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$ (KTM).

Nếu $m \neq 1$, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0; x = \frac{2m}{m - 1}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\frac{2m}{m - 1} > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{m - 1} > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn là 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

Câu 4: Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x + 1}$ có đồ thị là (C).

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm điểm có hoành độ $M(0; -1)$ là $y = 2x - 1$.

c) Tồn tại tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.

d) Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA \perp OB$ thì k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = -1$.

b) Đúng.

Đồ thị (C) cắt trục Oy tại $M(0; -1)$.

Ta có $y' = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(0) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x - 1$.

c) Sai.

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M_1(x_1; y_1)$ có hệ số góc $k_1 = y'(x_1) = 1 + \frac{1}{(x_1+1)^2} > 0$.

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M_2(x_2; y_2)$ có hệ số góc $k_2 = y'(x_2) = 1 + \frac{1}{(x_2+1)^2} > 0$

. Khi đó $k_1 k_2 > 0$ nên không tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.

d) Đúng.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị (C) và đường thẳng $y = k$ là

$$x - \frac{1}{x+1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + x - 1 = k(x+1). \end{cases} \quad (I)$$

Nhận thấy $x = -1$ không thỏa mãn (1) nên $(I) \Leftrightarrow x^2 + (1-k)x - 1 - k = 0$. (2)

Phương trình (2) có $\Delta = (1-k)^2 + 4(1+k) = k^2 + 2k + 5 = (k+1)^2 + 4 > 0, \forall k$.

Do đó, đường thẳng $y = k$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; k), B(x_B; k)$ với x_A, x_B là nghiệm của phương trình (2).

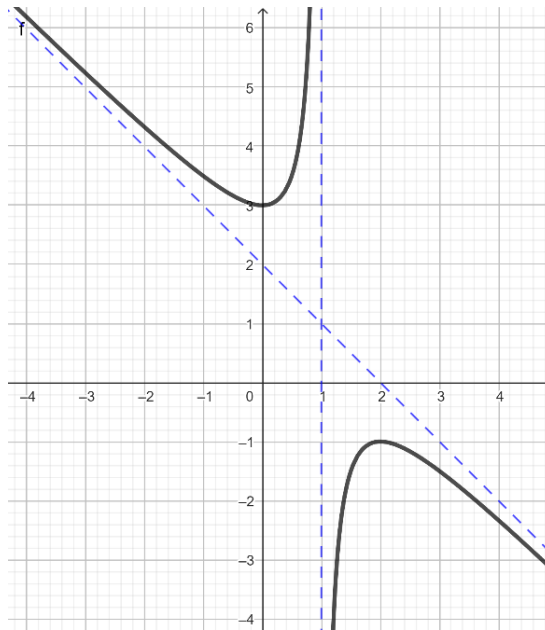
Theo Vi-et thì $x_A x_B = -1 - k$.

Ta có $OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + k^2 = 0 \Leftrightarrow -1 - k + k^2 = 0$.

Vậy $OA \perp OB$ thì k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới. Tính $P = a + b + c$.



Lời giải

Trả lời: -3

Ta có: $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$.

- Nên đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = ax + 2$, mà như hình vẽ đường tiệm cận xiên đi qua điểm $(1;1)$ suy ra $1 = a.1 + 2 \Leftrightarrow a = -1$.

- Đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.

Khi đó hàm số đã cho có dạng $y = -x + 2 + \frac{b}{x-1}$.

- Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $-0 + 2 + \frac{b}{0-1} = 3 \Leftrightarrow 2 - b = 3 \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy $P = a + b + c = -1 + (-1) + (-1) = -3$.

Câu 2: Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức: $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỷ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu vạn đồng, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn?

Lời giải

Trả lời: 2,2

Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng.

Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$ (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000, \text{ với } x > 0.$$

$$\text{Ta có } f(x) = M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}.$$

Xét hàm số $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$, với $0 < x \leq 30000$.

$$f'(x) = 0,0001 - \frac{10000}{x^2} = \frac{0,0001x^2 - 10000}{x^2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10000 \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

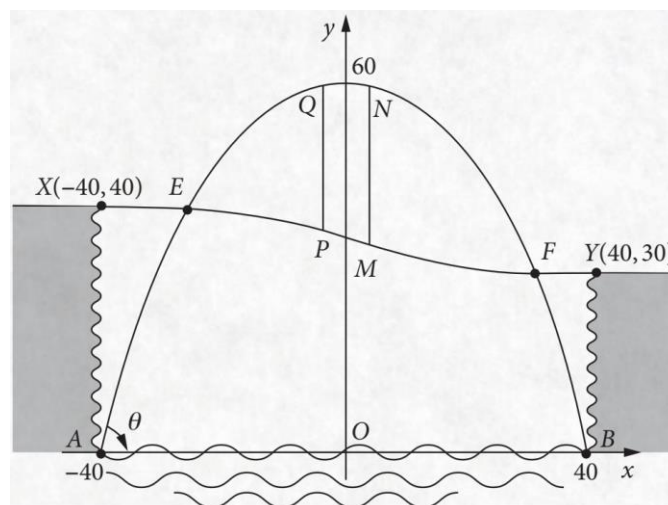
x	0	10000	30000
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(10000)$	$f(30000)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10000$.

Do đó, số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10000$ (cuốn).

Vậy chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10000 cuốn là: $M(10000) = 2,2$ (vạn đồng).

Câu 3: Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$

Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 49,5

Theo bài ra ta có: phương trình của Parabol là $y = 60 - \frac{3}{80}x^2$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

$$D = 60 - \frac{3}{80}x^2 - \left(\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35 \right) \text{ với } x \in (-23,71; 27,99)$$

$$\text{Xét } D' = -\frac{3}{40}x - \frac{3x^2}{25600} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49$$

Bảng biến thiên:

x	-23,71	2,49	27,99
D'(x)	+	0	-
D(x)	0	25,23	0

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi $x = 2,49$

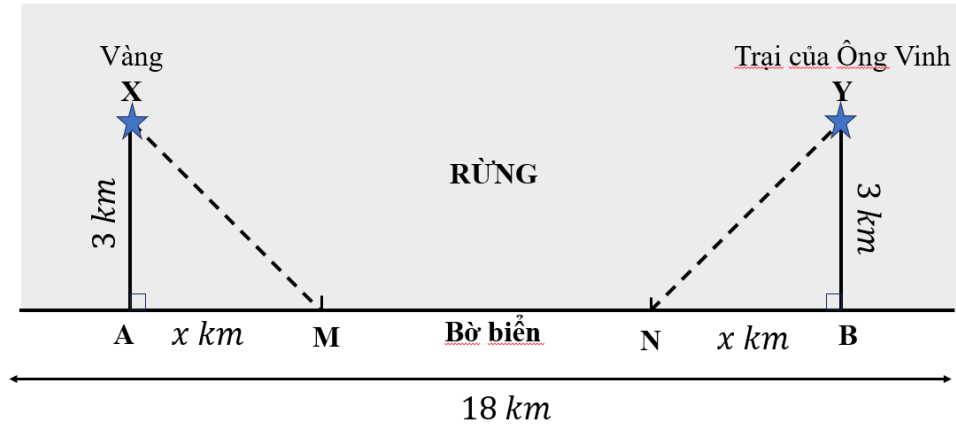
$$\Rightarrow MN = D_{MN} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot 2,49}{16} + 35 \right) \approx 25,23$$

Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua $Oy \Rightarrow x_{PQ} \approx -2,49$

$$\Rightarrow PQ = D_{PQ} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{-2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot -2,49}{16} + 35 \right) \approx 24,3$$

Tổng độ dài $MN + PQ = 49,5$.

Câu 4: Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Anh ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm A : 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của Ông Vinh nằm ở Y , cách điểm B : 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km. (Như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50\log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 32,6

Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi thời gian di chuyển về đến trại thấp nhất.

Vậy nên Quỹ đường ông Vinh di chuyển về đến trại phải thấp nhất.

Quỹ đường của Ông Vinh

Theo bài ra ta có: ông Vinh sẽ đi qua các quỹ đường $XM + MN + NY$.

Ta có: $XM = NY = \sqrt{9 + x^2}$; $MN = 18 - 2x$

Thời gian Ông Vinh chạy đến Trại nghỉ là: $T(x) = 2\left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13}\right)$ với $x \in (0; 9)$

Xét $T'(x) = 2\left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

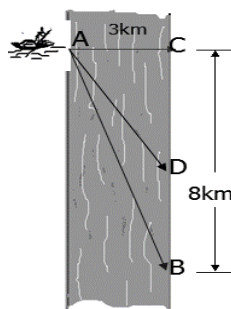
x	0	$\frac{5}{4}$	9
$T'(x)$	-	0	+
$T(x)$	$\frac{168}{65}$	$\frac{162}{65}$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = \frac{5}{4}$.

$$\Rightarrow \min_{x \in (0,9)} T(x) = T\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$$

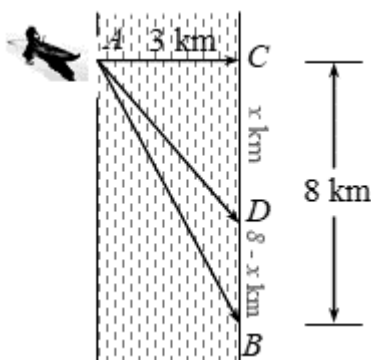
Vậy, nồng độ chất độc trong máu thấp nhất là $\min_{(0,+\infty)} y = 50 \log\left(\frac{162}{65} + 2\right) \approx 32,6$

Câu 5: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: phút) để người đàn ông đến B .



Lời giải

Trả lời: 80



Gọi x (km) là độ dài quãng đường CD , $(0 \leq x \leq 8)$; $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường DB .

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD = \sqrt{x^2 + 9}$ là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8 - x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ trên khoảng $[0; 8]$.

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 80'$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Điểm M là điểm bất kỳ trên đồ thị (C) , tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình là: $y = \left[1 - \frac{1}{(x_0 - 1)^2} \right] (x - x_0) + x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1}$ (*)

Gọi I là giao hai tiệm cận, tọa độ của $I(1; 2)$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng $x = 1$ tại điểm $B \Rightarrow y_B = 2 \left(1 + \frac{1}{x_0 - 1} \right) \Leftrightarrow B \left(1; 2 + \frac{2}{x_0 - 1} \right)$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận xiên $y = x + 1$ tại điểm A .

$\Rightarrow \left[1 - \frac{1}{(x_0 - 1)^2} \right] (x_A - x_0) + x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1} = x_A + 1 \Leftrightarrow x_A = 2x_0 - 1 \Rightarrow A(2x_0 - 1; 2x_0)$

□ Diện tích tam giác $AB I$ là $S \Rightarrow S = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{2} \cdot IA \cdot IB$ (1)

Ta có: $\overline{IA}^2 = (2x_0 - 2; 2x_0 - 2) \Rightarrow IA^2 = 8(x_0 - 1)^2 \Leftrightarrow IA = |x_0 - 1| 2\sqrt{2}$

$$\overline{IB} = \left(0; \frac{2}{x_0 - 1}\right) \Rightarrow IB = \frac{2}{|x_0 - 1|} \Leftrightarrow IA \cdot IB = |x_0 - 1| \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{|x_0 - 1|} = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2.$$

♦ **Đề 3:**

👉 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$

Bảng biến thiên trên là hàm số nào sau đây

A. $y = x^3 - 3x^2 + 2.$ **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2.$ **C.** $y = x^4 + 3x^2 + 2.$ **D.** $y = \frac{x+1}{x-2}.$

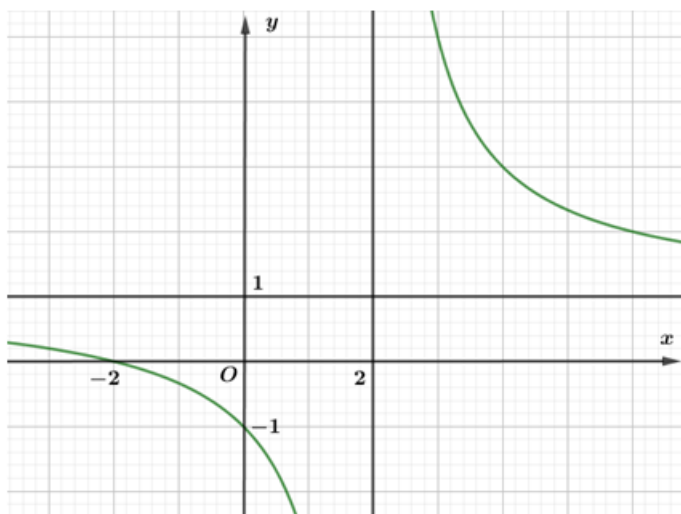
Lời giải

Đây là dáng điệu của hàm số bậc 3 nên ta loại $y = x^4 + 3x^2 + 2$ và $y = \frac{x+1}{x-2}.$

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = -\infty$ nên đáp án $y = x^3 - 3x^2 + 2$ thỏa mãn.

Câu 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x-2}{x+2}.$ **B.** $y = \frac{2x+4}{x-2}.$ **C.** $y = \frac{x+1}{x-2}.$ **D.** $y = \frac{x+2}{x-2}.$

Lời giải

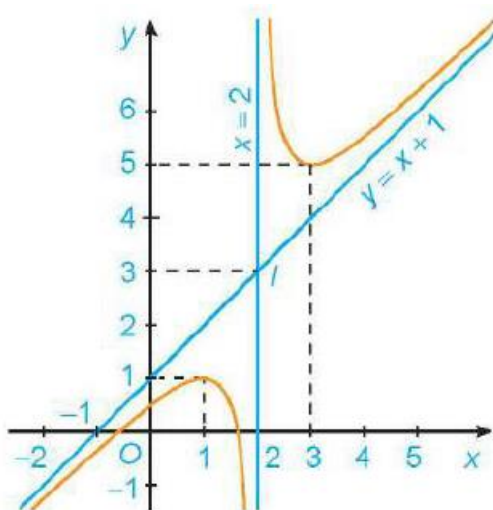
+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là $x = -2$. Loại A

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-2}$ có tiệm cận ngang là $y = 2$. Loại B

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$. Loại **C**.

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận ngang là $y = 1$, tiệm cận đứng $x = 2$, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 .

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Khẳng định nào sau đây SAI?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 1$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

D. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là $A(0;1)$.

Lời giải

Căn cứ vào đồ thị ta có:

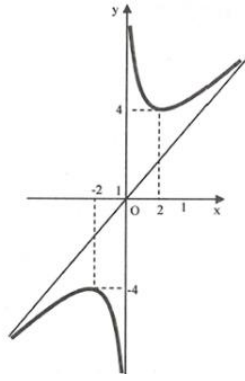
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x + 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

Tọa độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục Ox là $A(x_0; 0)$ với $0 < x_0 < 1$.

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = x^4 - 2x^2$.

C. $y = \frac{x^2+4}{x}$.

D. $y = x^3 - 3x^2$.

Lời giải

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ không có tiệm cận xiên. Loại A

+) Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ không có tiệm cận xiên. Loại B

+) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ không có tiệm cận xiên. Loại D

+) Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+4}{x}$ có tiệm cận xiên là $y = x$, tiệm cận đứng $x = 0$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x-1}$. Tọa độ giao điểm của đồ thị và trục Oy là

A. $(2;0)$.

B. $(0;2)$.

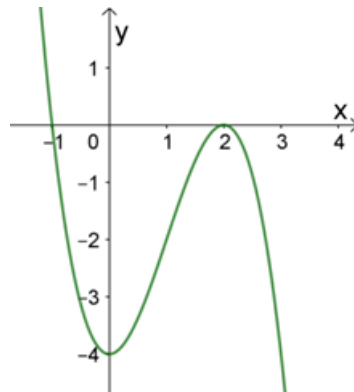
C. $(4;0)$.

D. $(0;4)$.

Lời giải

Cho $x = 0$, ta được $y = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0 - 1} = 4$. Tọa độ giao điểm với trục Oy là $(0;4)$.

Câu 6: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x-1}{x}$.

B. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

C. $y = -x^3 + 3x - 4$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

+) Hàm số $y = \frac{x-1}{x}$ không xác định tại $x=0$. Loại A

+) Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có hệ số $a=1 > 0$. Loại B

+) Ta có $y = -x^3 + 3x - 4 \Rightarrow y' = -3x^2 + 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Hàm số có hai điểm cực trị $x = \pm 1$. Loại C

+) Ta có $y = -x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$. Hàm số có hai điểm cực trị $x=0, x=2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ và $y = 2x - 7$. Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm thì tổng hoành độ hai giao điểm bằng

A. 7.

B. 5.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $\frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = 2x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 11x + 8 = 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11 - \sqrt{89}}{2} \\ x_2 = \frac{11 + \sqrt{89}}{2} \end{cases}$$

suy ra, tổng hoành độ của hai giao điểm là: $x_1 + x_2 = \frac{11 - \sqrt{89}}{2} + \frac{11 + \sqrt{89}}{2} = 11$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Số giao điểm của đường thẳng $y=1$ và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là

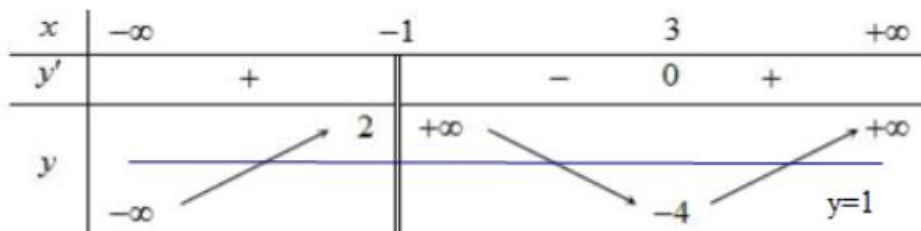
A. 3.

B. 2.

C. 1.

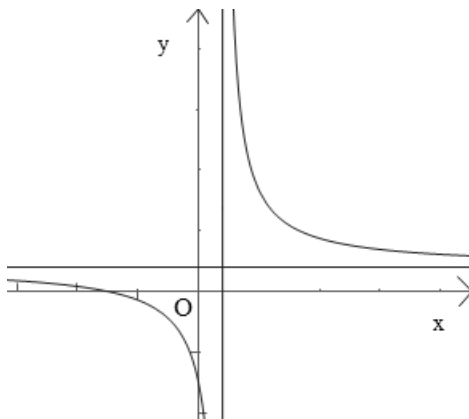
D. 0.

Lời giải



Số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là 3.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a > 1, b > 0, c < 1$. **B.** $a > 1, b < 0, c > 1$. **C.** $a < 1, b > 0, c < 1$. **D.** $a > 1, b > 0, c > 1$.

Lời giải

Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -\frac{d}{c-1}$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y = \frac{a-1}{c-1}$.

Nhìn đồ thị ta thấy: $x = -\frac{d}{c-1} > 0$ mà $d < 0 \Rightarrow c-1 > 0 \Rightarrow c > 1$.

$y = \frac{a-1}{c-1} > 0 \Rightarrow a-1 > 0 \Rightarrow a > 1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 10: Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải có dạng hình trụ và chứa được $16\pi(m^3)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phi phải có chiều cao h và bán kính đáy R bằng bao nhiêu để sản xuất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R = 4(m), h = 2(m)$. **B.** $R = 2(m), h = 4(m)$.

C. $R = 2(m), h = 2(m)$. **D.** $R = 4(m), h = 4(m)$.

Lời giải

Do thùng phi có dạng hình trụ nên:

$$V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \frac{16}{R^2} \quad (1)$$

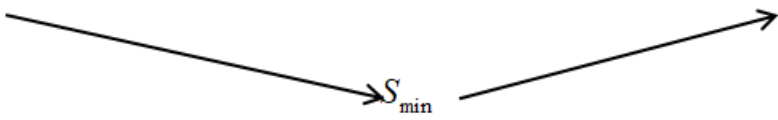
Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$$S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(h + R) \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp} = 2\pi \left(\frac{16}{R} + R^2 \right) \Rightarrow S'_{Tp} = 2\pi \left(-\frac{16}{R^2} + 2R \right) = \frac{4\pi}{R^2} (R^3 - 8) \Rightarrow S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Bảng biến thiên

R	0	2	$+\infty$
S'(R)	-	0	+
S(R)			

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì $R = 2(m)$ và chiều cao là $h = 4(m)$.

Câu 11: Gọi S là tập hợp các giá trị m để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + x - 3}{x - 1}$ tạo với hai trục hệ tọa độ Oxy một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó tổng các giá trị của S bằng

A. $\frac{7}{2}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $-\frac{11}{2}$.

Lời giải

với $m = 0$ ta có $y = \frac{x - 3}{x - 1}$. Khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

với $m = 2$ ta có $y = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 2x + 3$. Khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

với $m \neq 0; m \neq 2$ ta có $y = mx + m + 1 + \frac{m - 2}{x - 1}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx - m - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{m - 2}{x - 1} = 0$ nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = mx + m + 1$.

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục Ox là $\left(\frac{m - 1}{m}; 0 \right)$;

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục Oy là $(0; m + 1)$.

Đường tiệm cận xiên tạo thành một tam giác thì diện tích của tam giác:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| m + 1 \right| \cdot \left| \frac{m - 1}{m} \right| = 2 \Rightarrow (m + 1)^2 = 4|m| \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 = 4m; & \text{khi } m \geq 0 \\ m^2 + 2m + 1 = -4m; & \text{khi } m < 0 \end{cases}$$

$$\hat{U} \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 0; & \text{khi } m \geq 0 \\ m^2 + 6m + 1 = 0; & \text{khi } m < 0 \end{cases} \hat{U} \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy tổng giá trị của S bằng $\frac{-11}{2}$.

Câu 12: Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).

A. $p = 0,4$.

B. $p = 0,3$.

C. $p = 0,2$.

D. $p = 0,1$.

Lời giải

Sau t phút, trong bể chứa $(50t + 150)$ lít nước và $20t$ gam chất khử trùng.

Suy ra nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$ gam/lít.

Khảo sát sự biến thiên hàm số $f(t) = \frac{20t}{50t + 150}$, $t \geq 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{3000}{(50t + 150)^2} > 0, \forall t \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{50t + 150} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{50 + \frac{150}{t}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	0,4

Dựa vào BBT ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.

Vậy $p = 0,4$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Khi đó

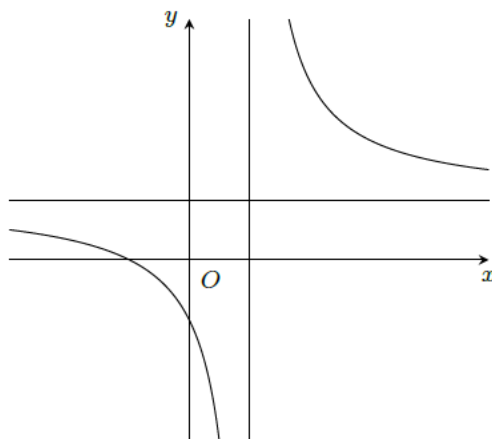
- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $(0; +\infty)$.
- b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(0; 2)$.
- c) Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng 4.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

- a) **SAI** vì Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.
- b) **ĐÚNG**. Thay $x = 0$ ta được $y = 2$.
- c) **SAI**. Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Ta thấy $y'(0) = -3 \neq 0$. Suy ra hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.
- d) **ĐÚNG**. Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1(TM); x = -1(KTM)$.
 $y(0) = 2; y(2) = 4; y(1) = 0$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng 4.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



- a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.
- c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.
- d) Trong các số a, b, c có hai số âm.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

- a) **Đúng**.
Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- b) **Đúng**.
Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.

c) **Đúng.**

Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.

d) **Sai.**

Tiệm cận đứng $x = a > 0$.

Tiệm cận ngang $y = b > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$ (vì $a > 0$).

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ có đồ thị (C). Khi đó

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

c) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 4.

d) Cho đường thẳng $y = mx - 2$. Khi đó có đúng 8 giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 10 để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = mx - 2$ tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía so với tiệm cận đứng của đồ thị (C).

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) **SAI** vì Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) **ĐÚNG.** Dễ thấy tiệm cận đứng là $x = 2$. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x - 2} \right) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x - 2} \right) = 0$. Vậy phương trình tiệm cận xiên là $y = x$.

c) **ĐÚNG.** Ta có $y' = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}$. Ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 4$. $y(0) = -2; y(4) = 6$. Vậy

tổng các giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là $-2 + 6 = 4$.

d) **SAI.** Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = mx - 2$$

Dễ thấy phương trình không có nghiệm $x = 2$ nên phương trình tương đương

$$(m - 1)x^2 - 2mx = 0.$$

Nếu $m = 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$ (KTM).

Nếu $m \neq 1$, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0; x = \frac{2m}{m - 1}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\frac{2m}{m - 1} > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{m - 1} > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn là 2;3;4;5;6;7;8;9;10.

Câu 4: Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x+1}$ có đồ thị là (C) .

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.
- b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm điểm có hoành độ $M(0;-1)$ là $y=2x-1$.
- c) Tồn tại tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.
- d) Để đường thẳng $y=k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA \perp OB$ thì k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x=-1$.

b) Đúng.

Đồ thị (C) cắt trục Oy tại $M(0;-1)$.

Ta có $y' = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(0) = 2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x-1$.

c) Sai.

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M_1(x_1; y_1)$ có hệ số góc $k_1 = y'(x_1) = 1 + \frac{1}{(x_1+1)^2} > 0$.

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M_2(x_2; y_2)$ có hệ số góc $k_2 = y'(x_2) = 1 + \frac{1}{(x_2+1)^2} > 0$.

. Khi đó $k_1 k_2 > 0$ nên không tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.

d) Đúng.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị (C) và đường thẳng $y=k$ là

$$x - \frac{1}{x+1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + x - 1 = k(x+1). \end{cases} \quad (I)$$

Nhận thấy $x=-1$ không thỏa mãn (1) nên $(I) \Leftrightarrow x^2 + (1-k)x - 1 - k = 0$. (2)

Phương trình (2) có $\Delta = (1-k)^2 + 4(1+k) = k^2 + 2k + 5 = (k+1)^2 + 4 > 0, \forall k$.

Do đó, đường thẳng $y=k$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; k), B(x_B; k)$ với x_A, x_B là nghiệm của phương trình (2).

Theo Vi-et thì $x_A x_B = -1 - k$.

Ta có $OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + k^2 = 0 \Leftrightarrow -1 - k + k^2 = 0$.

Vậy $OA \perp OB$ thì k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Vậy $y_{CT} = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{2x+6}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x = a$ và $y = b$. Tính $a + 4b$?

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5x-3}{2x+6} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5x-3}{2x+6} = +\infty$. ZS

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}.$$

Do đó đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x = -3$ và $y = \frac{5}{2}$ là các tiệm cận đứng và ngang

Như vậy, $a = -3$; $b = \frac{5}{2} \Rightarrow a + 4b = -3 + 4 \cdot \frac{5}{2} = 7$

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 9}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức $C = a + 3b$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 13

Ta có $f(x) = 5x - 1 + \frac{8}{x-1}$ nên đồ thị hàm số nhận hai đường thẳng $x = 1$ và $y = 5x - 1$ tương ứng là TCĐ và TCX. Suy ra $a = 1$, $b = 4 \Rightarrow C = 1 + 3 \cdot 4 = 13$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (T) . Số giao điểm của (C) với (T) là?

Lời giải

Trả lời: 2

Xét phương trình hoành độ giao điểm: (ĐK $x \neq 1$)

$$x^3 - 3x + 2 = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 - \frac{x+2}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot \left((x-1)^2 - \frac{1}{x-1} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ (x-1)^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(TM) \\ x=2(TM) \end{cases}$$

Vậy số giao điểm của (C) với (T) là 2.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

Lời giải

Trả lời: 3

Hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và

$$f(-x) = 2024^{-x} - 2024^x - x - \sin x = -f(x)$$

, suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Mặt khác, $y' = f'(x) = 2024^x \cdot \ln 2024 + 2024^{-x} \cdot \ln 2024 + 1 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình

$$f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow f(x+3) = -f(x^3 - 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow f(x+3) = f(-x^3 + 4x - m) \Leftrightarrow x+3 = -x^3 + 4x - m$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = -m$$

Đặt $g(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y				5		1	$+\infty$
	$-\infty$						

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 3$ tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow 1 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -1.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa đề.

Câu 6: Một cốc chứa 25 ml dung dịch $NaOH$ với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch $NaOH$ khác với nồng độ 9 mg/ml được trộn vào cốc. Gọi $C(x)$ là nồng độ của $NaOH$ sau khi trộn x (ml) từ bình chứa, ta thấy nồng độ của $NaOH$ trong cốc sẽ luôn giảm theo x nhưng luôn lớn hơn một số a . Tính a ?

Lời giải

Trả lời: 9

Tổng khối lượng của $NaOH$ sau khi trộn x (ml) là: $25 \cdot 100 + 9x = 2500 + 9x$ (mg)

Tổng thể tích của dung dịch sau khi trộn là: $25 + x$.

Ta có $C(x) = \frac{2500 + 9x}{25 + x}; x \geq 0$.

Ta có TXĐ của hàm số là $D = [0; +\infty)$

Có $C'(x) = \frac{9 \cdot (25 + x) - (2500 + 9x)}{(25 + x)^2} = \frac{-2275}{(25 + x)^2} < 0, \forall x \in D$

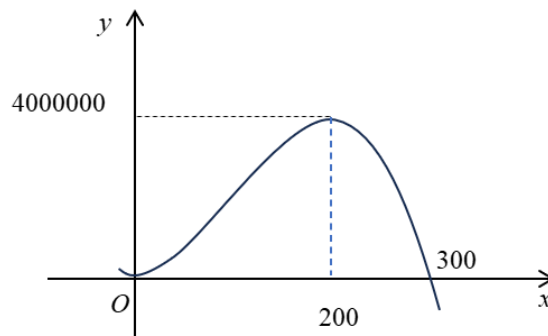
Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2500 + 9x}{25 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2500}{x} + 9}{\frac{25}{x} + 1} = 9$

Do đó nồng độ $NaOH$ luôn giảm nhưng luôn lớn hơn 9 mg/ml.

♦ Đề 4: ỨNG DỤNG.

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm ($0 \leq x \leq 300$) được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng) và được minh họa bằng đồ thị ở hình bên dưới.



Cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất?

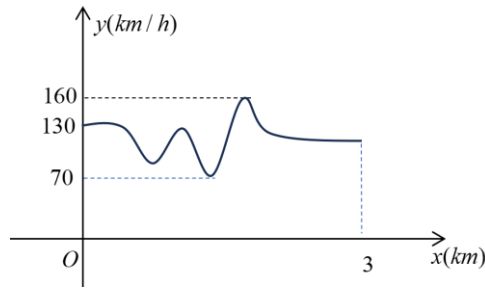
- A. 4000000. B. 300 C. 200. D. 150.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4000000 khi $x = 200$.

Do đó cần sản xuất 200 sản phẩm thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất.

Câu 2: Đồ thị bên dưới là tốc độ của một chiếc xe đua trên đoạn đường đua bằng phẳng dài 3 km.



Tốc độ nhỏ nhất của xe đua trên đoạn đường này bằng

- A.** 3 km/h . **B.** 160 km/h **C.** 130 km/h . **D.** 70 km/h .

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy tốc độ nhỏ nhất bằng 70 km/h .

Câu 3: Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó là $C(x) = 27900 + 100x - 1,5x^2 + 0,025x^3$. Khi đó hàm chi phí biên tương ứng là

- A.** $C'(x) = 28000 - 3x + 0,075x^2$. **B.** $C'(x) = 100 - 3x + 0,075x^2$.
C. $C'(x) = 100 + 3x + 0,075x^2$. **D.** $C'(x) = 28000 + 3x + 0,075x^2$.

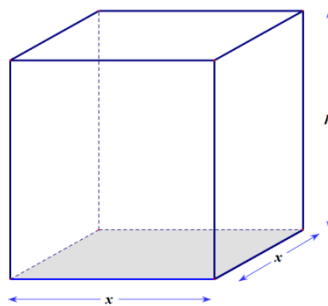
Lời giải

Hàm chi phí biên tương ứng là: $C'(x) = 100 - 3x + 0,075x^2$.

Câu 4: Một cửa hàng bán dầu muốn đóng những thùng đựng dầu có thể tích không đổi bằng $V = 30\text{ dm}^3$, thùng có dạng hình hộp chữ nhật có nắp; đáy là hình vuông cạnh x dm ($x > 0$). Trên thị trường, giá nguyên vật liệu làm đáy và nắp thùng là $120\,000$ đồng/ m^2 , giá nguyên vật liệu làm mặt xung quanh của thùng là $100\,000$ đồng/ m^2 . Chi phí để cửa hàng làm một thùng đựng dầu được cho bởi công thức (đơn vị nghìn đồng)?

- A.** $f(x) = \frac{12}{5}x^2 + \frac{120}{x}$. **B.** $f(x) = 24x^2 + \frac{120}{x}$.
C. $f(x) = 2x^2 + \frac{120}{x}$. **D.** $f(x) = 24x^2 + \frac{1200}{x}$.

Lời giải



Thể tích của thùng $V = 30\text{ dm}^3$, vì x ($x > 0$, đơn vị dm) là cạnh đáy của thùng (hình vuông) nên chiều cao của thùng là: $h = \frac{V}{x^2} = \frac{30}{x^2}$.

Giá nguyên vật liệu làm đáy và nắp thùng là 1 200 đồng/1dm², giá nguyên vật liệu làm mặt xung quanh của thùng là 1 000 đồng/1dm².

Diện tích mặt đáy, nắp thùng và diện tích xung quanh lần lượt là: $x^2; x^2; 4xh$. Chi phí làm một thùng đựng dầu là:

$$f(x) = 2.1,2.x^2 + 1.4xh = 2,4x^2 + \frac{120}{x} = \frac{12}{5}x^2 + \frac{120}{x} \text{ (đơn vị nghìn).}$$

Câu 5: Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra. Khi đó hàm doanh thu của công ty là

A. $f(x) = 1000x - 25x^2$ **B.** $f(x) = 1000x + 25x^2$.

C. $f(x) = 25x^2 - 1000x$.

D. $f(x) = 1000 - 25x^2$.

Lời giải

Ta có khi có x sản phẩm được bán ra thì giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, do đó doanh thu của cửa hàng khi bán ra x sản phẩm là $f(x) = x.p(x) = 1000x - 25x^2$.

Câu 6: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $1 \leq x \leq 18$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 20x + 500$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 320 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hãy viết biểu thức tính $L(x)$ theo x

A. $L(x) = 320x$.

B. $L(x) = -x^3 + 6x^2 + 300x - 500$.

C. $L(x) = x^3 - 6x^2 - 300x + 500$.

D. $L(x) = x^3 - 6x^2 + 340x + 500$.

Lời giải

Khi bán x mét vải lụa:

Số tiền thu được là: $B(x) = 320x$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận thu được là: $L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 6x^2 + 300x - 500$ (nghìn đồng).

Câu 7: Giả sử một công ty du lịch bán tour với giá là x (triệu đồng)/khách thì doanh thu sẽ được biểu diễn qua hàm số $f(x) = -200x^2 + 550x$. Công ty phải bán giá tour cho một khách là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất (làm tròn tới hàng phần trăm).

A. 1,38 triệu.

B. 1,37 triệu.

C. 1,3 triệu.

D. 1,2 triệu.

Lời giải

Doanh thu là $f(x) = -200x^2 + 550x$.

Ta có $f'(x) = -400x + 550$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}$.

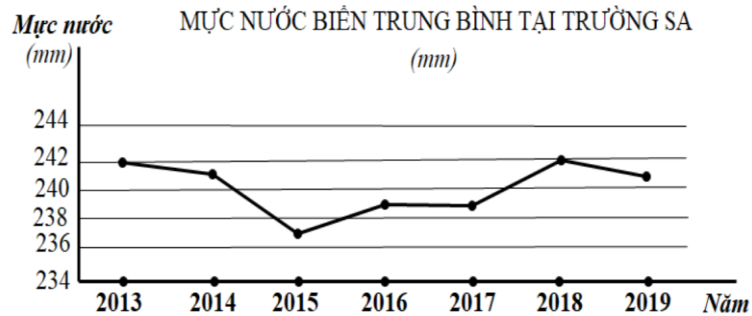
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{3025}{8}$		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần bán tour với giá 1,38 triệu đồng/khách thì doanh thu sẽ cao nhất.

Câu 8: Mức nước biển trung bình tại trường sa từ năm 2013 đến năm 2019 được cho bởi biểu đồ trong hình bên dưới.



Trong khoảng thời gian từ năm 2016 đến năm 2019, năm nào mực nước biển trung bình tại trường sa cao nhất ?

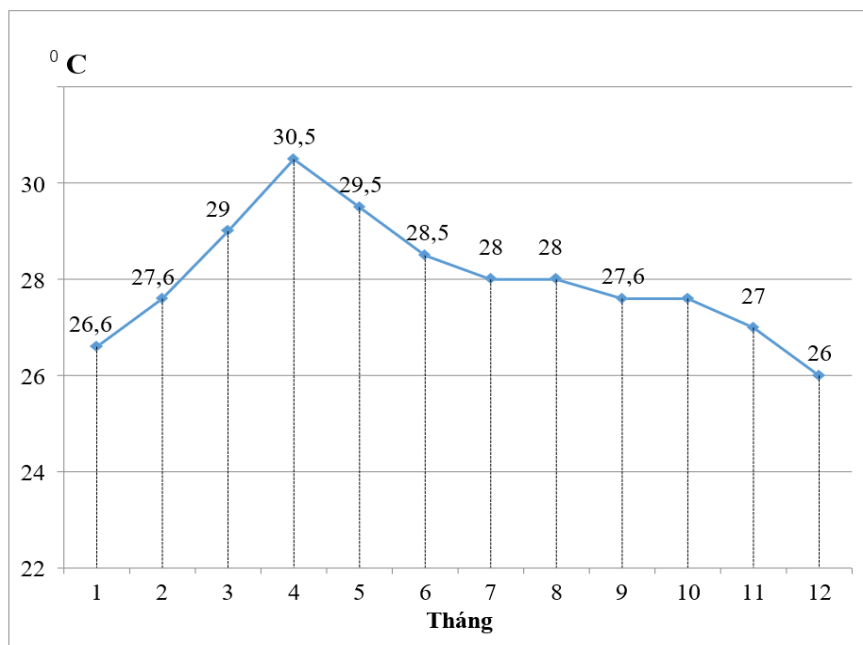
- A.** 2013. **B.** 2018. **C.** 2015. **D.** 2019.

Lời giải

Nhìn vào biểu đồ ta thấy, tại năm 2018 mực nước biển trung bình tại trường sa cao nhất bằng 242 mm .

Câu 9: Hình vẽ cho biết nhiệt độ trung bình các tháng năm 2020 tại Thành phố Hồ Chí Minh đo bằng đơn vị $^{\circ}\text{C}$. Hãy cho biết trong năm 2020 tại Thành phố Hồ Chí Minh thì nhiệt độ trung bình của tháng nào cao nhất, nhiệt độ trung bình của tháng nào thấp nhất?

Nhiệt độ trung bình các tháng năm 2020 tại TPHCM ($^{\circ}\text{C}$)

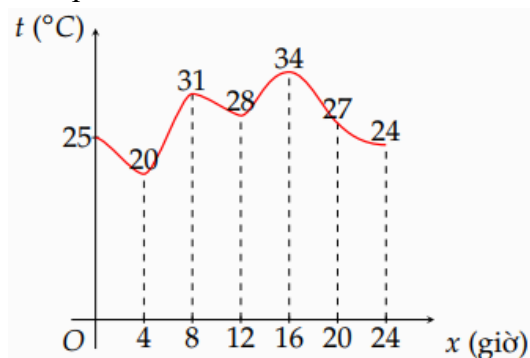


- A. Nhiệt độ trung bình của tháng 6 cao nhất và tháng 12 thấp nhất.
- B. Nhiệt độ trung bình của tháng 4 cao nhất và tháng 2 thấp nhất.
- C. Nhiệt độ trung bình của tháng 4 cao nhất và tháng 12 thấp nhất.
- D. Nhiệt độ trung bình của tháng 5 cao nhất và tháng 12 thấp nhất.

Lời giải

Từ hình vẽ ta thấy nhiệt độ trung bình của tháng cao nhất là tháng 4. Nhiệt độ trung bình của tháng thấp nhất là tháng 12.

Câu 10: Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Thời điểm nào trong ngày có nhiệt độ thấp nhất ?

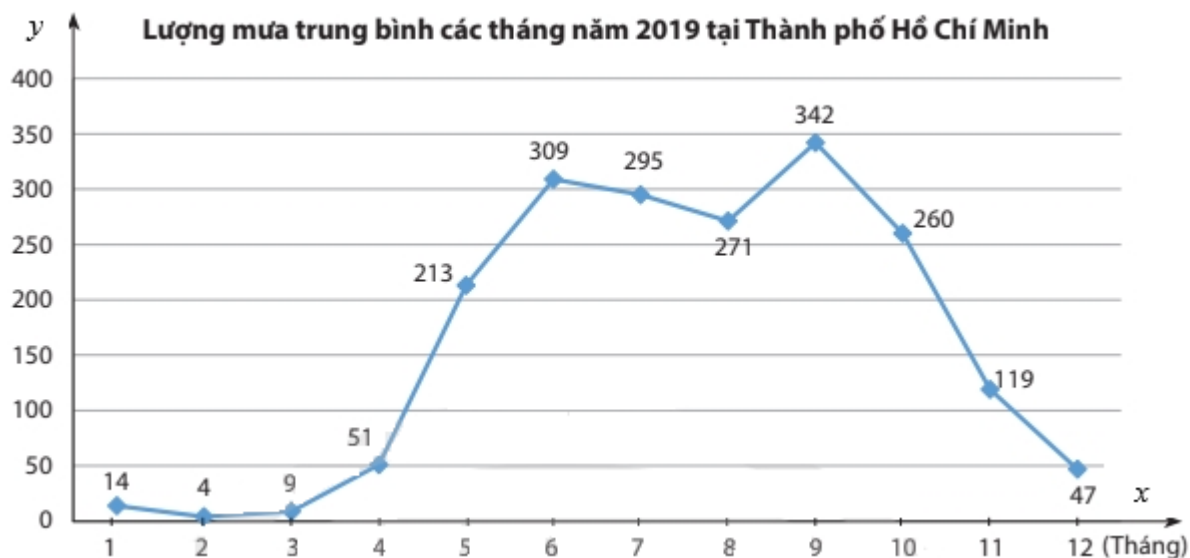


- A. 4 h.
- B. 0 h.
- C. 2 h.
- D. 6 h.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là vào 4h sáng.

Câu 11: Hình bên cho biết lượng mưa trung bình các tháng năm 2019 tại Thành phố Hồ Chí Minh đo theo đơn vị milimet. Hãy cho biết vào tháng nào trong năm 2019 thì lượng mưa (mm) là cao nhất ?

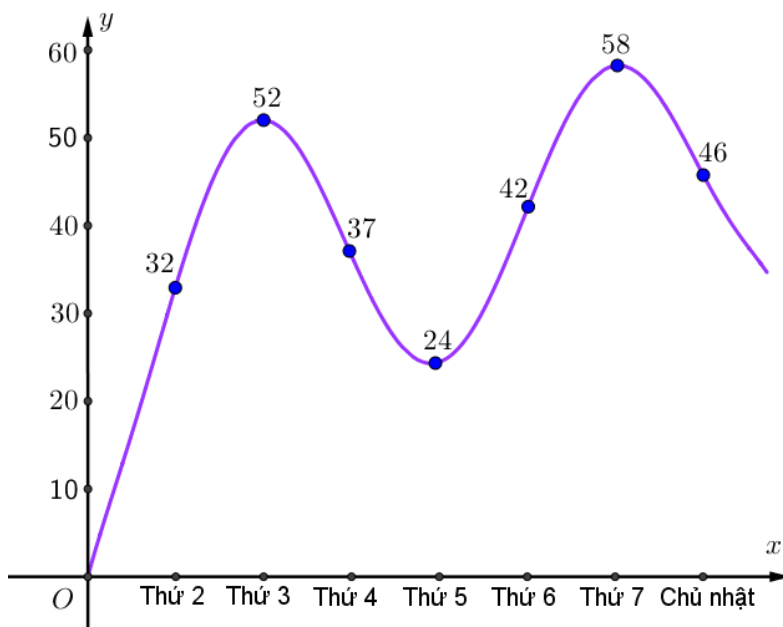


- A. Tháng 6. B. Tháng 8. C. Tháng 9. D. Tháng 10.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy vào Tháng 9 thì lượng mưa ở Thành phố Hồ Chí Minh cao nhất trong năm 2019

Câu 12: Một cửa hàng trà sữa có đồ thị biểu diễn số ly trà sữa bán được trong một tuần như sau. Số ly trà sữa cửa hàng đó bán được nhiều nhất trong một ngày là bao nhiêu



- A. 62 ly. B. 52 ly. C. 68 ly. D. 58 ly.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy vào thứ 7 cửa hàng bán được nhiều nhất là 58 ly trà sữa.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



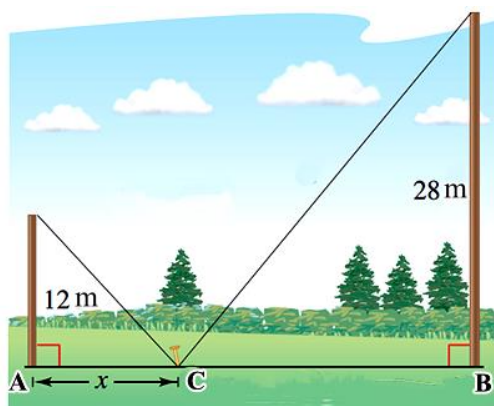
- a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
- b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \frac{x(4+\pi)}{4}$.
- c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.
- d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \frac{16}{8+\pi}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

- a) Bán kính của hình bán nguyệt là $\frac{x}{2}$ nên nửa chu vi bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
- b) Ta có $2(x+y) + \frac{\pi x}{2} = 8 \Leftrightarrow y = 4 - \frac{x(4+\pi)}{4}$.
- c) Diện tích của cửa sổ: $S = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x\left(4 - x - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - x^2 - \frac{\pi x^2}{8}$.
- d) S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{4}{2 + \frac{\pi}{4}} = \frac{16}{8+\pi}$ nên $y = 4 - x - \frac{\pi x}{4} = \frac{16}{8+\pi}$.

Câu 2: Có hai cây cột, một cây cao 12 m và một cây cao 28 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây, gắn vào một cọc duy nhất nối từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Gọi x là khoảng cách từ cột cao 12 m đến cọc.



- a) Để tổng chiều dài của dây ngắn nhất thì $x \in (0;30)$.

- b) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là $\sqrt{1684 + x^2}$.
- c) Tổng chiều dài của dây là $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.
- d) Tổng chiều dài ngắn nhất của dây là 48,5 m.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Rõ ràng để tổng chiều dài dây ngắn nhất thì cọc phải nằm trong khoảng giữa hai cây cột nên $x \in (0; 30)$.

b) $AC = x \Rightarrow BC = 30 - x$ nên chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là $\sqrt{28^2 + (30 - x)^2} = \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.

c) Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 12 m là $\sqrt{12^2 + x^2} = \sqrt{144 + x^2}$ suy ra tổng chiều dài của sợi dây là $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.

d) Xét hàm số $f(x) = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$ với $x \in [0; 30]$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{144 + x^2}} + \frac{x - 30}{\sqrt{1684 - 60x + x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{1684 - 60x + x^2} = (30 - x)\sqrt{144 + x^2}$$

$$\Rightarrow x^2(1684 - 60x + x^2) = (30 - x)^2(144 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 640x^2 + 8540x - 129600 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 9; x = -\frac{45}{2}$$

Do $x \in [0; 30]$ nên ta nhận $x = 9$

Ta có $f(0) \approx 53,04$; $f(9) = 50$; $f(30) = 60,31$

Vậy chiều dài ngắn nhất của dây là 50 m.

Câu 3: Dân số của một quốc gia sau t (năm) bắt đầu từ năm 2023 được tính theo công thức $N(t) = 100e^{0,012t}$ (trong đó $N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \leq t \leq 50$)

- a) Dân số của quốc gia này ở năm 2030 vượt mức 110 triệu người.
- b) Dân số của quốc gia này ở năm 2035 vượt mức 115 triệu người.
- c) Vào năm 2030 thì tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.
- d) Vào năm 2026 thì tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Dân số của quốc gia này ở năm 2030 là $N(7) = 100e^{0,012 \cdot 7} \approx 108,8$ triệu người.

b) Dân số của quốc gia này ở năm 2035 là $N(12) = 100e^{0,012 \cdot 12} \approx 115,5$ triệu người.

c) Hàm tốc độ tăng dân số là $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$. Ta có:

$$1,2e^{0,012t} = 1,6 \Leftrightarrow t \approx 2,34.$$

Vậy thời vào năm 2026, tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm

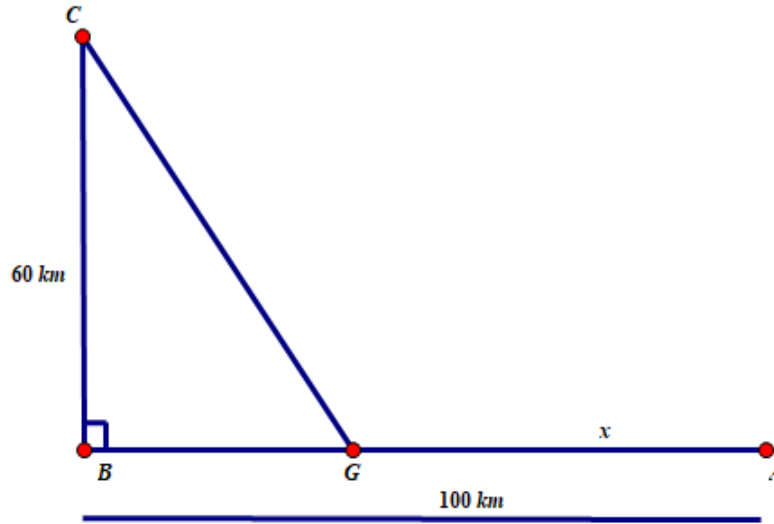
d) Hàm tốc độ tăng dân số là $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$. Ta có:

$$1,2e^{0,012t} = 1,6 \Leftrightarrow t \approx 2,34.$$

Vậy thời vào năm 2026, tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.

Câu 4: Đường dây điện 110KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết

$BC = 60km$, $AB = 100km$, góc $ABC = 90^\circ$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Đặt $x = AG$.



a) Khi $x = 20 km$ thì đường dây điện nối từ C về G dài $100km$.

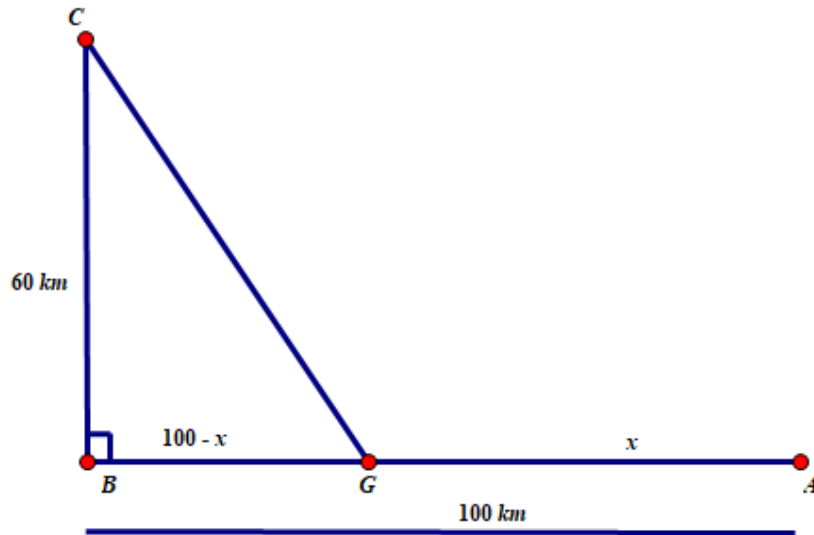
b) Khi $x = 20 km$ thì tổng chi phí mắc điện là $560.000USD$.

c) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50km$.

d) Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000USD$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Có $AG = x \Rightarrow BG = 100 - x$ với $0 \leq x \leq 100$.

Xét tam giác CBG vuông tại B có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$.

Khi $x = 20 \text{ km} \Rightarrow CG = 100 \text{ km}$.

b) Chi phí tiền mắc điện là $f(x) = 3000x + 5000 \cdot \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$

Khi $x = 20 \text{ km} \Rightarrow CG = 100 \text{ km}$ và tổng chi phí mắc điện là $T = f(20) = 560.000 \text{ USD}$.

c) Để chi phí mắc điện ít nhất thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3000 - 5000 \frac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3000 = 5000 \frac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55 \\ x = 145(l) \end{cases}$$

Ta có

$$f(0) = 583095,1895 \text{ USD}$$

$$f(55) = 540.000 \text{ USD}$$

$$f(100) = 600.000 \text{ USD}$$

Vậy chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 55 \text{ km}$.

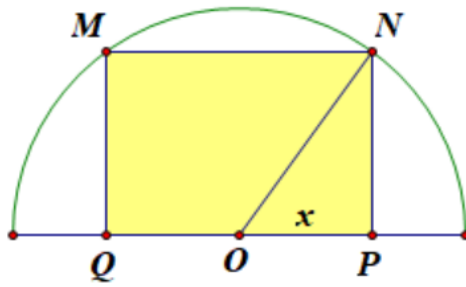
d) chi phí mắc điện nhỏ nhất là 540.000 USD

📖 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4 \text{ dm}$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 16



Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $MNPQ$ có $OP = x$ ($0 < x < 4$), $ON = 4$.

Khi đó diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN \cdot NP = 2x\sqrt{16 - x^2}$.

Xét hàm số: $f(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$ trên $(0; 4)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2\sqrt{16 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-4x^2 + 32}{\sqrt{16 - x^2}}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \in (0; 4) \\ x = -2\sqrt{2} \notin (0; 4) \end{cases}.$$

BBT:

x	0		$2\sqrt{2}$		4	
$f'(x)$		+	0	-		
$f(x)$	0			16		0

$$\text{Ta có: } \max_{(0; 4)} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 16.$$

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là $16(\text{dm}^2)$.

Câu 2: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày? (đơn vị triệu đồng)

Lời giải

Trả lời: 1,2

Số tiền thu về khi bán x mét vải lụa là: $220x$.

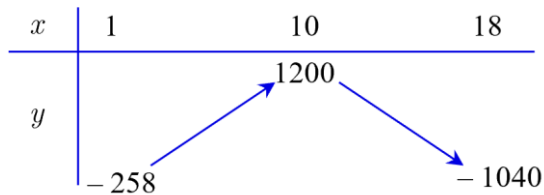
Lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa là:

$$L(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ với $x \in [1; 18]$

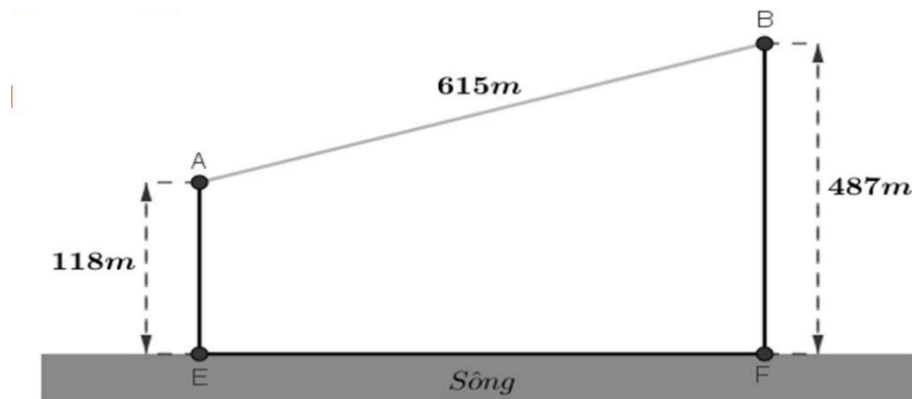
$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240; L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \in [1; 18] \\ x = -8 \notin [1; 18] \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Vậy hộ làm nghề dệt này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 1,2 triệu đồng khi sản xuất 10 mét vải lụa trong một ngày.

Câu 3: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.

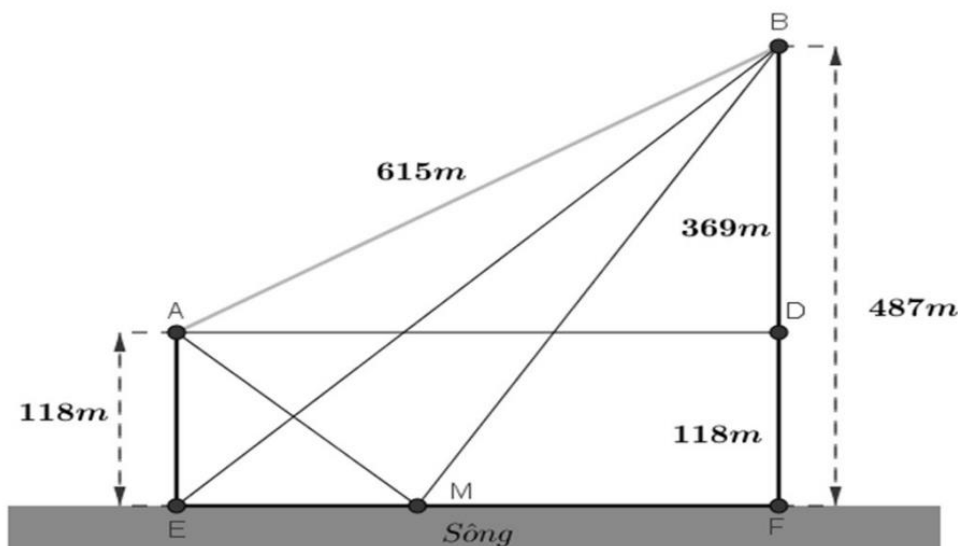


Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất là số nguyên dương mà người đó có thể đi là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 780

Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B để dàng tính được $BD = 369, EF = 492$.



Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \text{ với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$$

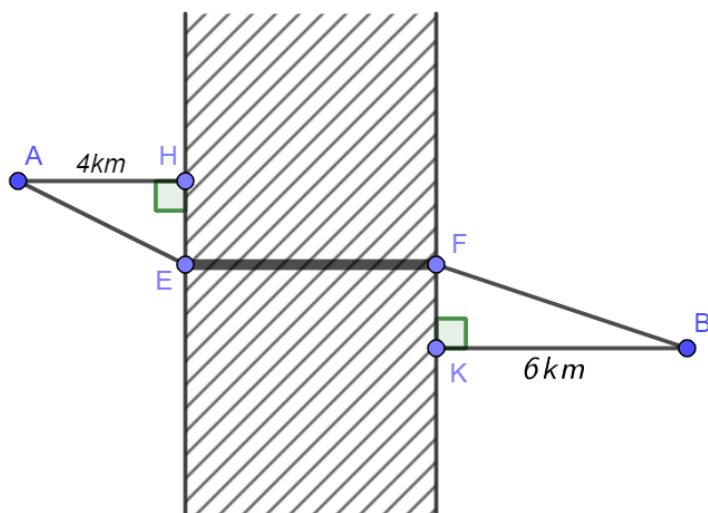
Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$

ta có giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 780$ m

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ 780 m.

Câu 4: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4km và thành phố B cách con sông một

khoảng là 6km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20\text{km}$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần chục)



Lời giải

Trả lời: 8,94

Đặt $HE = x$, $FK = y$, với $x, y > 0$

$$\text{Ta có: } HE + KF = 20 \Rightarrow x + y = 20, \begin{cases} AE = \sqrt{16 + x^2} \\ BF = \sqrt{36 + y^2} = \sqrt{36 + (20 - x)^2} \end{cases}$$

Nhận xét: Vì EF không đổi nên AB ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } AE + BF = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(20 - x)^2 + 36} = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 40x + 436} = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 20}{\sqrt{x^2 - 40x + 436}}, \forall x \in (0; 20).$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Rightarrow x = 8$$

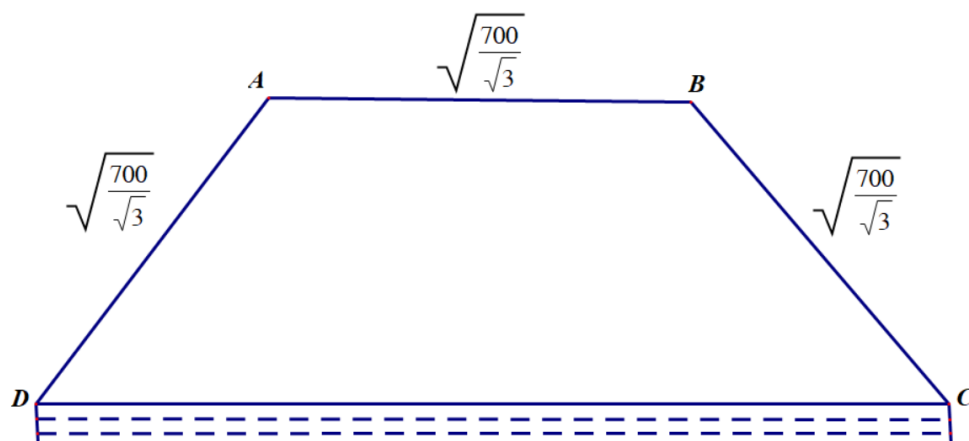
Bảng biến thiên

x	0	8	20	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			$10\sqrt{5}$	

$$\text{Vậy } AE = \sqrt{8^2 + 16} \approx 8,94\text{km}$$

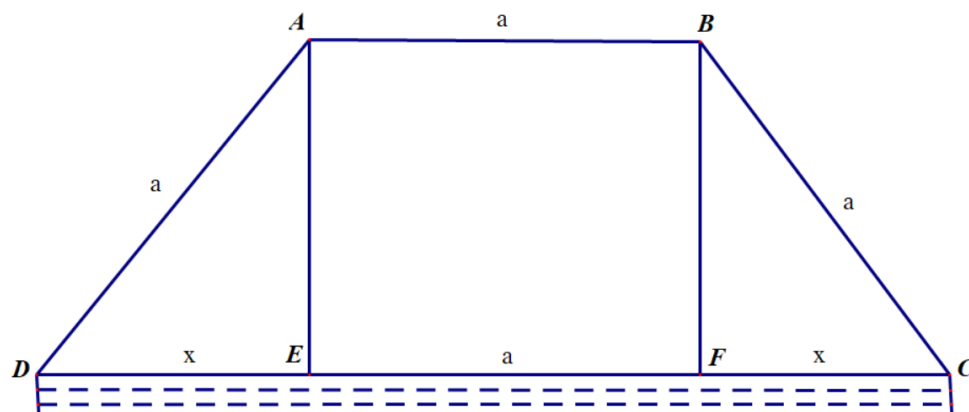
Câu 5: Bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $\sqrt{\frac{700}{3}}\text{ (m)}$ và muốn rào một khu vườn có

dạng hình thang cân $ABCD$ như trong hình vẽ. Khu vườn có 3 mặt rào, mặt còn lại tiếp giáp với bờ sông nên không cần rào. Hỏi diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể rào được là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải

Trả lời: 525



Gọi $a = \sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}$ (m). Vẽ các đường cao AE và BF của hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ trên.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $DE = FC$ và $EF = AB = a$.

Đặt $DE = FC = x$ ($x > 0$). Ta có $DC = DE + EF + FC = x + a + x = 2x + a$

Ta có $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

Ta thấy, x phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < a$.

Diện tích của hình thang cân $ABCD$ là

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD)AE = \frac{1}{2}(a + 2x + a)\sqrt{a^2 - x^2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{Xét hàm số } S(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2} \text{ với } x \in (0; a). \Rightarrow S'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x + a)(a - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \text{ (l)} \\ x = \frac{a}{2} \text{ (n)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{a}{2}$	a	$+\infty$
$S'(x)$			+	0	-
$S(x)$			$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$		

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ tại $x = \frac{a}{2}$.

$$\text{Thay } a = \sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}} \text{ vào biểu thức } \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot \left(\sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 525$$

Vậy bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $525m^2$.

Câu 6: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

Lời giải

Trả lời: 2,25

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \geq 2\,000\,000$ đồng)

+) Khi tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

$$\text{Tăng giá } x - 2.000.000 \text{ đồng, ta có số căn hộ bị bỏ trống là } \frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$$

$$\text{Khi cho thuê với giá } x \text{ đồng thì số căn hộ cho thuê là: } 50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

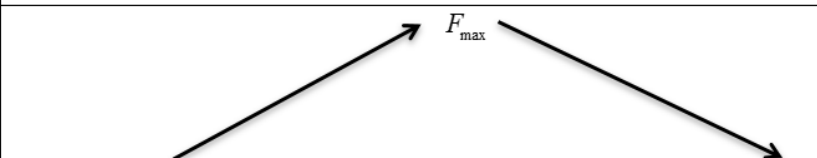
$$\text{Ta có: } F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90 \right) x = -\frac{1}{50.000} x^2 + 90x$$

Ta tìm GTLN của $F(x) = -\frac{1}{50.000} x^2 + 90x$, $x \geq 2.000.000$

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000} x + 90$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000} x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000	2.250.000	$+\infty$
$F'(x)$	+		-
$F(x)$			

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2,25 triệu đồng mỗi căn hộ thì thu được lợi nhuận lớn nhất.